MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE : EXERCICES .

Durée: 4 heures.Aucun document n'est autorisé.Les quatre exercices sont indépendants .
Les candidats sont instamment priés de rédiger les exercices sur des copies séparées.

PREMIER EXERCICE

1)Soit t un nombre réel.

1-a) Soit la fonction f définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ 2\pi - \textit{périodique} \ , \ \textit{impaire} \ , \\ \forall x \in]0,\pi[\ , \ f(x) = ch(tx) \ , \\ f(0) = f(\pi) = 0 \ . \end{cases}$$

Former la série de Fourier de f dans le cas $t = 0$ et dans le cas $t \neq 0$.

1-b) Etudier la convergence de cette série.

En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \frac{1}{ch(\frac{\pi}{2}t)} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2 + t^2} \qquad (1)$$

2) Soit

$$g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{cos(yx)}{ch(x)} dx$$

2-a) Quel est le domaine de définition de g ?

2-b) Etablir que

$$\forall x \geq 0 \ , \ \frac{1}{ch(x)} = 2 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p e^{-(2p+1)x} + \frac{2(-1)^{n+1} e^{-(2n+3)x}}{1 + e^{-2x}}$$

2-c) En utilisant (1) exprimer g à l'aide de fonctions usuelles.

DEUXIEME EXERCICE

Sauf en ce qui concerne les notations , les deux questions sont indépendantes.
a et b sont deux réels donnés , $a < b$.
E désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose , pour f et g dans E :

$$\phi_1(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad et \quad \phi_2(f,g) = \phi_1(f',g')$$

où f' et g' sont les dérivées respectives de f et g.

1) 1-a) L'application ϕ_1 définit-elle un produit scalaire sur E ?
Même question pour ϕ_2 .

1-b) on pose $q_1(f) = \phi_1(f,f)$ et $q_2(f) = \phi_2(f,f)$.
n est un entier donné , $n > 1$.
Soit $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ et $\{f_i\}_{i \in I}$ une famille libre de n fonctions données de E.
r désigne la fonction de $\mathbb{R}^n \backslash \{(0, 0, \cdots, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$r(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \frac{q_2(f)}{q_1(f)} \quad où \quad f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

Exprimer $r(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ en fonction des λ_i et des constantes $a_{ij} = \phi_1(f_i, f_j)$, $b_{ij} = \phi_2(f_i, f_j)$, $(i,j) \in I \times I$.
On suppose qu'il existe $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ tel que

$$\forall i \in I \ , \ \frac{\partial}{\partial \lambda_i} r(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = 0 \ .$$

On note $\rho = r(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$.
Montrer que ρ est racine d'un polynôme de degré n , déterminant d'une matrice que l'on exprimera à l'aide des matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$, $(i,j) \in I \times I$.

2)Ici $[a,b] = [-1,1]$. On donne $P_1 = 1$.
Construire les polynômes P_2 , P_3 ,P_4 tels que :
$P_i = X^{i-1} + R_i$ avec degré de $R_i < i - 1$,$i \in \{2,3,4\}$,
et que la famille $\{P_i\}_{i \in \{1,2,3,4\}}$ soit orthogonale pour ϕ_1.
Former les matrices A et B définies au 1-b) avec
$f_i = P_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$.

TROISIEME EXERCICE

R est un réel strictement positif donné.
On se place dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit S la surface définie par la représentation paramétrique $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \ \mapsto \ M(\theta, \lambda)$ de coordonnées x, y, z avec :

$$\begin{cases} x(\theta,\lambda) = (R + \lambda cos\frac{\theta}{2}) cos\theta \\ y(\theta,\lambda) = (R + \lambda cos\frac{\theta}{2}) sin\theta \\ z(\theta,\lambda) = \lambda sin(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

$$(\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \ .$$

1)Par un point M de S passe-t-il une ou plusieurs droites contenue(s) dans S ?
Comparer les points $M(\theta + 2\pi, -\lambda)$ et $M(\theta, \lambda)$ ainsi que les vecteurs

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}(\theta + 2\pi, -\lambda) \quad et \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}(\theta, \lambda)$$

2) Soit (C) la courbe projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de l'ensemble des points $M(\theta, R)$ où $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$, orientée dans le sens des θ croissants.

Etudier et représenter graphiquement (C).

Calculer la circulation le long de (C) du champ de vecteurs $\vec{V}$:

$$M \mapsto \vec{V}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j} \ .$$

3)Pour les candidats de l'option T seulement :
(S_1) désigne la portion de (S) correspondant à $(\theta, \lambda) \in [0, \pi] \times [-R, R]$, orientée par le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ continu tel que $\vec{n}.\vec{k} > 0$ en $M(0,0)$.

Calculer le flux à travers (S_1) du champ de vecteurs $\vec{W}$:

$$M \mapsto \vec{W}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k} \ .$$

QUATRIEME EXERCICE

a est un réel strictement positif donné. Le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (C) une courbe de classe C^1 de ce plan , passant par O qui est choisi comme origine de l'abscisse curviligne s sur (C) . On note $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. s est le paramètre :

$$x \ : \ s \mapsto x(s) \ , \ y \ : \ s \mapsto y(s) \ , s \in [0, a]$$

On pose $b = y(a)$. On suppose que (C) est contenue dans le demi-plan $y \geq 0$ et que les fonctions x et$y$ sont croissantes. On pose $ds = f(y)dy$.
On fait l'hypothèse que f est continue sur $]0, b]$ et que l'intégrale $\int_0^b f(y)dy$ converge.
Soit

$$I(y_0) = \int_0^{y_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{y_0 - y}} \ , \ y_0 \in]0, b] \ .$$

1) L'intégrale $I(y_0)$ converge-t-elle ?
2) Ici (C) a pour équation $x = Rsin\theta$, $y = R(1 - cos\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
où R est un réel donné, $0 < R \leq b$.
(C) est orientée dans le sens des θ croissants . Tracer (C).
Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $y_0 = y(\theta_0)$.
Exprimer $I(y_0)$ en fonction de

$$J(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}} \ .$$

Calculer

$$\lim_{\theta_0 \to 0} J(\theta_0) \ .$$

(On pourra poser $t = tan(\frac{\theta}{2})$ et $t_0 = tan(\frac{\theta_0}{2})$)
3)Les hypothèses de 2) n'ont plus lieu.
Montrer que si la fonction $y \mapsto \sqrt{y}f(y)$ est constante , $I(y_0)$ ne dépend pas de y_0. Cette hypothèse est supposée réalisée dans la suite.
On note $\sqrt{2k}$ la constante $\sqrt{y}f(y)$. Calculer $y(s)$.
Désignant par ϕ l'angle de la tangente en $M(x, y)$ à (C) avec l'axe $(O; \vec{i})$, exprimer y en fonction de ϕ puis de $t = 2\phi$; faire de même pour x.
Etudier et représenter graphiquement (C).